Marc-Robin Wendt

Halbadditive Strukturen

Definition 1
Eine algebraische Struktur (A,$\diamondsuit$) heißt **halbadditiitve Struktur**,wenn

1. $A \subset \mathbb{R}$
2. $\exists \mu \in A \; \forall y \in A : \mu \leq y$ (A ist nach unten beschränkt)
3. $\exists \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0 \; \forall x, y \in A : |x - y| > \beta$
4. $x \diamondsuit y := \min\{z \in A \mid x + y \leq z\}$

Bemerkung 2

1. $\diamondsuit$ ist kommuntativ.
   Beweis: $x \diamondsuit y = \min\{z \in A \mid x + y \leq z\} = \min\{z \in A \mid y + x \leq z\} = y \diamondsuit x$.
2. Sei $\alpha := \alpha(A) := \sup\{\beta \in \mathbb{R} \mid \forall x, y \in A : |x - y| > \beta\}$.
   Dann: $\forall x \in A : x \diamondsuit \alpha = \min\{z \in A \mid x < z\}$ (**Nachfolger von** x).
   Beweis: Sei $x \in A \Rightarrow$
   $x \diamondsuit \alpha = \min\{z \in A \mid x + \alpha \leq z\}$
   $= \min\{z \in A \mid z - x \geq \alpha\}$
   $= \min\{z \in A \mid z - x \geq 0\}$
3. A ist abzählbar.
   Beweis: $x_0 := \mu$, $x_n := x_{n-1} \diamondsuit \alpha$.

Definition 3
1. Sei $n \in \mathbb{N}$, $x \in A$.
${}^n x := (x \diamondsuit x) \diamondsuit \cdots) \diamondsuit x$ n-mal.
$[x] := \{y \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : y = {}^n x\}$ (**Orbit von** x).
2. (**kleinstes gemeinsame Vielfache**)
Seien $x_1, \ldots, x_n \in A$. $\mathrm{kgV}(x_1, \ldots, x_n) := \min\{y \in \bigcap_{i=1}^{n} [x_i]\}$.
3. (**größter gemeinsamer Teiler**)
Seien $x, y \in A$: $\mathrm{ggT}(x, y) := \max\{z \in A \mid x \in [z] \wedge y \in [z]\}$
4. $y \in A$ heißt **irreduzibel**, wenn $\nexists x \in A, x < y : y \in [x]$.
5. $y \in A$ heißt **semi-irreduzibel**, wenn $\nexists x \in A, x < y, x$ semi-irreduzibel: $y \in [x]$.
6. $I(A) := \{x \in A \mid x$ irreduzibel $\}$
7. ${}^s I(A) := \{x \in A \mid x$ semi-irreduzibel $\}$.

Bemerkung 4

1. $I(A) \subseteq {}^s I(A)$.
2. $\mu \in I(A)$.
   Beweis: Annahme $\mu \notin I(A) \Rightarrow \exists x \in A, x < \mu :\; \mu \in [x]$ Widerspruch.

3. $\mu = \min\{x \in I(A)\} = \min\{x \in {}^sI(A)\}$.

Satz 5
Sei $K := \{p \in A \mid p\diamondsuit\alpha < p\diamondsuit\mu\}$.
Sei $x \in K$, $U_1 := \{p \in {}^sI(A) \mid x \in [p]\}, U_2 := \{p \in {}^sI(A) \mid x\diamondsuit\alpha \in [p]\}$.
Dann: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
Beweis: Annahme $\exists y \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow x \in [y] \wedge x\diamondsuit\alpha \in [y] \Rightarrow x\diamondsuit\alpha = x\diamondsuit y$ Widerspruch, da $x \in K$.

Korollar 6
$\#^sI(A) = \infty \Rightarrow \#K = \infty$.
Beweis: Annahme $\#K < \infty \Rightarrow \exists x \in A\ \forall y \in K : x > y$
$\Rightarrow\ \forall z \in A, z > x : z \in [\mu] \Rightarrow \forall p \in {}^sI(A) : p < x$ Widerspruch.

Beispiel 7
Sei $\mathbb{N}_2 := \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\}, P :=$ {Menge der Primzahlen}.
Betrachte $(\mathbb{N}_2, \diamondsuit)$.
Es gilt: 1. $\mu = 2, \alpha = 1$.
2.$I(\mathbb{N}) = {}^sI(\mathbb{N}) = P$. $K = \mathbb{N}$.
3.$\#I(\mathbb{N}) = \infty$.
Beweis: Annahme $\#I(\mathbb{N}) < \infty \Rightarrow I(\mathbb{N}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$;
definiere $e := \mathrm{kgV}(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow e \in K$ und $U_1 = I(\mathbb{N})$.
Satz 5 $\Rightarrow U_2 = \emptyset \Rightarrow e\diamondsuit\alpha = e + 1 \in I(\mathbb{N})$ Widerspruch.

Vermutung 8 (Unendlichkeit der Primzahlpaare)
Sei $(\mathbb{N}_2, \diamondsuit)$ wie oben.
Behauptung: Es gibt unendlich viele Paare von Primzahlen p,q mit p-q=2.
Beweisidee: Betrachte $(P, \diamondsuit)$. Korollar 6 anwenden;
aus $\#K = \infty \Rightarrow$ Behauptung.

Lemma 9
Sei $(A, \diamondsuit)$ assoziativ. Dann:

1. ${}^sy\diamondsuit{}^sz = {}^s(y\diamondsuit z)$
2. ${}^s({}^ty) = {}^t({}^sy)$
3. ${}^sy\diamondsuit{}^ty = {}^{s+t}y$
4. ${}^s({}^ty) = {}^{st}y$

Beweis:

1. Induktion über s:
   $s = 1$:trivial;
   ${}^{s+1}y\diamondsuit{}^{s+1}z = (y\diamondsuit{}^sy)\diamondsuit({}^sz\diamondsuit z) = ((y\diamondsuit{}^sy)\diamondsuit{}^sz)\diamondsuit z = (y\diamondsuit({}^sy\diamondsuit{}^sz))\diamondsuit z =$
   $(y\diamondsuit{}^s(y\diamondsuit z))\diamondsuit z = ({}^s(y\diamondsuit z)\diamondsuit y)\diamondsuit z = {}^s(y\diamondsuit z)\diamondsuit(y\diamondsuit z) = {}^{s+1}(y\diamondsuit z)$.

2. $t \in \mathbb{N}$ bel., Induktion über s:
   $s = 1 : {}^1({}^t y) = {}^t y = {}^t({}^1 y)$;
   ${}^{s+1}({}^t y) = {}^t y \diamondsuit {}^s({}^t y) = {}^t(y \diamondsuit {}^s y) = {}^t({}^{s+1} y)$.

3. $t \in \mathbb{N}$ bel., Induktion über s:
   $s = 1 : {}^1 y \diamondsuit {}^t y = {}^{t+1} y$;
   ${}^{s+1} y \diamondsuit {}^t y = y \diamondsuit {}^s y \diamondsuit {}^t y = y \diamondsuit {}^{s+t} y = {}^{s+1+t} y$.

4. $t \in \mathbb{N}$ bel., Induktion über s:
   $s = 1$:trivial;
   ${}^{s+1}({}^t y) = {}^t y \diamondsuit {}^s({}^t y) = {}^t y \diamondsuit {}^{st} y = {}^{s+st} y = {}^{(s+1)t} y$.

Satz 10
Sei $(A, \diamondsuit)$ assoziativ. Dann: $\forall x, y \in A : x \in [y] \Rightarrow [x] \subseteq [y]$.
Beweis: Seien $x, y \in A, x \in [y], z \in [x] \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} : z = {}^s x, \exists t \in \mathbb{N} : x = {}^t y$
$\Rightarrow z = {}^s({}^t y), \mathit{Lemma}\ 9 \Rightarrow z = {}^{st} y \Rightarrow z \in [y]$.

Definition 11
$B \subseteq A, x \in A, d(x, B) := \min\{|z - x| \mid z \in B\}$.

Vermutung 12
$\forall x, y \in I(A), x \neq y, \exists z \in [x] :\ d(z, [y]) = \alpha\ \ (\Leftrightarrow \#I(A) = \infty\ ?)$.

Definition 13
$x \in A$ heißt gerade, wenn $\exists y \in A : y \diamondsuit y = x$.
$x \in A$ heißt ungerade, wenn x nicht gerade ist.

Bemerkung 14
In $(\mathbb{N}_2, \diamondsuit)$ gilt: $p \in \mathbb{N}_2$ gerade $\Leftrightarrow p \in [2]$.

Vermutung 15
Sei $\{g \in A \mid g \text{ gerade}\} = [\mu] \setminus \{\mu\}$, dann ist $(A, \diamondsuit)$ assoziativ.

Bemerkung 16
Umkehrung gilt nicht. Bsp. $(\mathbb{N}, \diamondsuit)$.

Vermutung 17 (GOLDBACH; verallgemeinert)
Variante 1: $\forall x \in A, x\ \mathit{gerade}\ \exists p, q \in I(A) : p \diamondsuit q = x$.
Variante 2: $\forall x \in A, x \in [\mu] \exists p, q \in I(A) : p \diamondsuit q = x$.
(gelten beiden nicht in $(P, \diamondsuit) \Rightarrow$ Assoziativität notwendig ?)

Vermutung 18 (Unendlichkeit der Primzahlpaare; verallgemeinert)
Variante 1: Zu jeder gerade Zahl $x \in A$ existieren unendlich viele Paare aufeinanderfolgender irreduzibler Elemente $p, q \in I(A)$, so daß $p - q = x$.
Variante 2: Zu jeder Zahl $x \in [\mu]$ existieren unendlich viele Paare aufeinanderfolgender irreduzibler Elemente $p, q \in I(A)$, so daß $p - q = x$.

Vermutung 19
$\forall x, y \in {}^s I(A), x \neq \mu, y \neq \mu : x \diamondsuit \alpha \neq y$.

Definition 20
Eine Zahl $x \in \mathbb{N}$ heißt p-Primzahl, wenn x nicht in p+1 Faktoren ($\neq 1$) zerlegt werden kann. (vgl. auch L.EULER „numerus primus“,„numerus secundus“,„numerus tertius“,usw.)

Definition 21 (Semiassoziativität)
Variante 1: $\forall a, b : (a \diamondsuit a) \diamondsuit b = a \diamondsuit (a \diamondsuit b)$
Variante 2: $\forall x, y, z,\ x + \alpha < y\ ,\ y + \alpha < z : (x \diamondsuit y) \diamondsuit z = x \diamondsuit (y \diamondsuit z)$
Variante 3: $\forall x, y, z,\ x \diamondsuit \alpha < y\ ,\ y \diamondsuit \alpha < z : (x \diamondsuit y) \diamondsuit z = x \diamondsuit (y \diamondsuit z)$

Vermutung 22 (FERMATscher Satz; verallgemeinert)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^n = y$$

kein Lösungstupel $(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{N}^{n+1}$ mit $x_i = 0$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Lösungsmenge für n=2:
$L_0 := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists (a, b) \in \mathbb{N}^2 : x = 2a(a + 2b - 1), y = (2b - 1)(2a + 2b - 1)\}$
$L := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists p \in \mathbb{N}, \exists (a, b) \in L_0 : (x, y) = p^2(a, b)\}$.

Definition 23
Sei $a \in \mathbb{R}, f \in C(\mathbb{R})$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt verallgemeinerte induktive Menge oder a,f-induktive Menge, wenn
1. $a \in M$,
2. $b \in M \Rightarrow b + f(b) \in M$.

Beispiel 24
Für $a = 1$ und $f \equiv 1$ auf $\mathbb{R}$ ist M induktive Menge (im herkömmlichen Sinne).

Beispiel 25
Sei $P = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ Menge der Primzahlen (aufsteigend geordnet).
$f : P \to \mathbb{N}$ sei definiert durch $f(p_i) := p_{i+1} - p_i$ und stetig fortgesetzt auf $\mathbb{R}$.
Sei $a := 2$ und sei M a,f-induktive Menge. Dann ist $P \subset M$.

Erzeugendensysteme

Definition 26
Sei $U \subseteq A,\ O(U) := \{x \in A \mid \exists y \in U : x \in [y]\}$ ist die Orbitalmenge von U.

Satz 27
Es gelte: $\forall U \subset I(A)$ endl.: $\alpha(O(I(A) - U)) = \alpha(A). Dann : \#I(A) = \infty$.
Beweis: Annahme $\#I(A) < \infty \Rightarrow \exists x_1 < \ldots < x_n : I(A) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Sei $U = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$
$\Rightarrow \alpha(O(I(A) - U)) = \alpha(O(x_n)) = \alpha([x_n]) \geq x_n > \alpha(A)$ Widerspruch.

Definition 28
1. Sei $E \subseteq A,\ H(E) := \{x \in A \mid x = e_1 \diamondsuit \ldots \diamondsuit e_n, e_1, \ldots, e_n \in E\}$ ist die Hülle von E.
2. Wenn $H(E) = A$ dann heißt E Erzeugendensystem von A.
3. E heißt minimal, wenn $\forall e \in E : H(E \setminus \{e\}) \neq A$.
4. E heißt Erzeugendensystem der Ordnung n, wenn $\forall x \in A \exists e_1, \ldots, e_n \in E : x = e_1 \diamondsuit \ldots \diamondsuit e_n$.

Bemerkung 29
1. $I(A)$ und ${}^sI(A)$ sind Erzeugendensysteme von A.
2. Sei $E \subset A$. Dann ist $O(E) \subseteq H(E)$.

Beispiel 30
1. (GOLDBACHsche Vermutung) Die Primzahlen sind ein Erzeugendensystem 3.Ordnung in $(\mathbb{N}, +)$.
2. In $(\mathbb{N}, +)$ ist $E = \{1, 2\}$ ein Erzeugendensystem und minimal.
3. (Satz von Zeckendorf) In $(\mathbb{N}, +)$ sind die Fibonacci-Zahlen ein Erzeugendensystem ohne endliche Ordnung.

Satz 31
Sei E Erzeugendensystem von A und $\#A = \infty$. Wenn E endlicher Ordnung ist, dann ist $\#E = \infty$.